امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة جوان 2002

شعبة : علوم الطبيعة والحياة — المدة : 3 ساعات

اختبار في مادة الرياضيات

التمرين الأول : (04 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس ، منها 3 حمراء ، 3 خضراء و 4 بيضاء.

1) نسحب من هذا الكيس ، ثلاث كرات ، في آن واحد ، ما احتمال الحصول على :

أ - نفس اللون ؟

ب - الألوان الثلاثة ؟

جـ - كرة بيضاء واحدة على الأقل ؟

2) نعتبر المتغير العشوائي س الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كرات عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

أ - ما هو قانون الإحتمال للمتغير العشوائي س ؟

ب - احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي س .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة م ، المعادلة ذات المجهول ص التالية :

$$\text{ص}^2 - \left[\sqrt{3} + 1 + 2\text{ت}\right]\text{ص} + \left(\sqrt{3} - 1\right) + \text{ت}\left(\sqrt{3}+1\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

ت هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له.

1) - أ - احسب $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ ثم حل في م المعادلة (1)

نسمي ص_1 و ص_2 حلي هذه المعادلة حيث $|\text{ص}_1| < |\text{ص}_2|$.

ب - اكتب كلاً من العددين ص_1 و ص_2 على الشكل المثلثي ثم استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب $\text{ص}_1 \times \text{ص}_2$.

2) ـ 1 - عين قيم العدد الطبيعي ن حتى يكون العدد : $\left(\frac{\text{ص}_1 \times \text{ص}_2}{2\sqrt{2}}\right)^{\text{ن}}$ عددا حقيقيا موجبا.

2- نضع $\text{أ} = \frac{\text{ص}_1}{2}$ و $\text{ب} = \frac{\text{ص}_2}{\sqrt{2}}$ و $\text{ل} = \frac{\text{أ} + \text{ب}}{1 + \text{أب}}$ ، نرمز بـ $\overline{\text{ل}}$ إلى مرافق ل .

α - تحقق أن : $|\text{أ}| = |\text{ب}| = 1$

β - احسب $\overline{\text{ل}}$ بدلالة أ و ب واستنتج أن ل عدد حقيقي .

المسألة (12 نقطة)

I - لتكن ها الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي س والمعرّفة بـ :

$$ها(س) = س + هـ^{2(س-1)}$$

أ - 1 - ادرس تغيرات الدالة ها .

- 2 - بيّن أن ها تقابل لـ ح نحو ح ثمّ استنتج أن المعادلة ها(س) = 0 حلا وحيدا α محصوراً بين $(-\frac{1}{5})$ و $(-\frac{1}{10})$.

- 3 - استنتج إشارة ها(س) على ح .

ب - نعتبر الدالة العددية تا ذات المتغير الحقيقي س حيث تا(س) = $س^2 + هـ^{2(س-1)}$.

1 - تحقق أن : ∀ س ∈ ح ، تاَ (س) = 2 ها (س) ، ثم ادرس تغيرات الدالة تا .

2 - بيّن أن تا (α) = $α^2 - α$ ثمّ استنتج حصراً للعدد تا (α) .

3 - نرمز بـ(ى) إلى منحنى الدالة تا في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (م ، و ، ى) . الوحدة على المحورين 5 سنتيمتر .

أ - ادرس الفروع اللانهائية.

ب - احسب تا (-1) ، تا $(-\frac{1}{2})$ ، تا $(\frac{1}{2})$ و تا (1) بتقريب قدره 10^{-2} بالنقصان.

جـ - ارسم (ى) .

II - لتكن عا اقتصار الدالة تا على [0 ، + ∞ [.

1 - بيّن أن عا تقبل دالة عكسية $عا^{-1}$ يطلب تعيين مجال تعريفها .

2 - جد معادلة لمماس منحنى الدالة $عا^{-1}$ عند النقطة ذات الترتيب β = +1

3 - انشئ المنحني (ىَ) منحنى الدالة $عا^{-1}$ في نفس المعلم السابق .

III - ن عدد طبيعي . نضع $ح_ن = \int_{ن}^{ن+1} [تا(س) - س^2]\, تفا س$.

1 - احسب $ح_ن$ بدلالة ن .

2 - احسب بدلالة ن المجموع $م_ن$ حيث $م_ن = ح_0 + ح_1 + ح_2 + \dots + ح_ن$.

3 - عيّن العدد الطبيعي ن حتى تكون مساحة الحيز من المستوي المحصور بين المنحنى (ى) والمنحنى (كـ) الذي معادلته ع = $س^2$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما س = 0 و س = ن + 1 مساوية إلى $\frac{25}{2}(هـ^{6} - \frac{1}{هـ^{2}})$ $سم^2$

تعطى القيم : $هـ^{-1}$ = 0,367 ... ، $هـ^{-2}$ = 0,135... ، $هـ^{-3}$ = 0,049 ... ، $هـ^{-4}$ = 0.018...

تكتب الإجابة النموذجية على هذه الورقة ولا تقبل سواها

الإجابة النموذجية لموضوع مقترح لبكالوريا دورة : ...2001...

إختبار مادة : الرياضيات ...... الشعبة : علوم الطبيعة والحياة ...... المدة : 3 ساعات ......

8

المجموع	مجزأة	عناصر الإجابة	محاور الموضوع
		التمرين الأول :	الإحتمالات (مفهوم الاحتمال، المتغير العشوائي وقانون توزيع الاحتمال)
	0,5	1- عدد الحالات الممكنة هو $C_{10}^{3} = 120$	
	3 × 0,5	حا(أ) $= \frac{6}{120}$ ، حا(ب) $= \frac{36}{120}$ ، حا(جـ) $= \frac{100}{120}$	
4	0,5	2- أ. قيم المتغير العشوائي س هي 0 ، 1 ، 2 ، 3	
		قانون الاحتمال للمتغير العشوائي س معرف كما يلي :	
	4 × 0,25	تا(0) $= \frac{20}{120}$ ، تا(1) $= \frac{60}{120}$ ، تا(2) $= \frac{36}{120}$ ، تا(3) $= \frac{4}{120}$	
	0,5	ب- الأمل الرياضي ل(تا) $= \frac{1}{120}\left[4\times3 + 36\times2 + 60\times1 + 20\times0\right] = \frac{144}{120}$.	
		التمرين الثاني :	الأعداد المركبة
	0,5 + 0,25	1) أ) $(\sqrt{3}-1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$ ، و $\Delta = (\sqrt{3}-1)^2$	
	0,25 + 0,25	ص$_1 = \sqrt{3} +$ ت ، ص$_2 = 1 +$ ت	
	4 × 0,25	ب- ص$_1 = 2\left[\text{تجب}(\frac{\pi}{6}) + \text{ت جب}(\frac{\pi}{6})\right]$ ، ص$_2 = \sqrt{2}\left[\text{تجب}(\frac{\pi}{4}) + \text{ت جب}(\frac{\pi}{4})\right]$	
	0,25	إذن ص$_1 \times$ ص$_2 = \left[2\sqrt{2} \text{ ، } \frac{5\pi}{12}\right]$	
4	0,25 + 2 × 0,25	2- أ- $\frac{\text{ص}_1 \times \text{ص}_2}{2\sqrt{2}} = \left[1 \text{ ، } \frac{5\pi}{12}\right]$ إذن $\left(\frac{\text{ص}_1 \times \text{ص}_2}{2\sqrt{2}}\right)^{ن} = \left[1 \text{ ، } \frac{5\pi ن}{12}\right]$	
	0,25	$\left(\frac{\text{ص}_1 \times \text{ص}_2}{2\sqrt{2}}\right)^{ن} \in$ ح$^+$ $\Longleftrightarrow \frac{5\pi ن}{12} = 2ك\pi$ ، ك ∈ ط ؛ منه قيم ن المطلوبة هي ن = 24ك ، ك ∈ ط .	
	0,25 + 0,25	ب- $\bar{ل} = \frac{\bar{أ}+\bar{ب}}{1+\bar{أ}\bar{ب}} = \frac{أ+ب}{1+أب} =$ ل إذن ل ∈ ح	
12 نقطة		**المسألة :**	التحليل
		I - 1) أ- دراسة تغيرات الدالة هـ : س ⟶ س + هـ$^{(1-س)}$	
	0,25	هـ معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق على ح .	
1,75	2 × 0,25	نها هـ(س) = −∞ و نها هـ(س) = +∞	
	0,25 + 0,25	لكل س ∈ ح ، هـ'(س) = 1 + 2 هـ$^{(...)}$ و لكل س ∈ ح ، هـ'(س) > 0	
	0,25	هـ متزايدة تماما على ح ، جدول التغيرات	
		2- بما أن هـ مستمرة ورتيبة تماما على ح و هـ(ح) = ح فإن هـ	
	0,25	هي تقابل لـ ح نحو ح	

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: المجموع
التحليل: دراسة الدوال الأسية، نظرية القيم المتوسطة، المنحنى المقارب، المماس، الدالة العكسية، حساب المساحات، المتتاليات العددية	لدينا $\text{ها}(-\frac{1}{5}) = -(0{,}109\ldots)$ و $\text{ها}(-\frac{1}{10}) = +(0{,}0108\ldots)$		5,75
	نعلم أن: ها مستمرة على $[-\frac{1}{5}, -\frac{1}{10}]$ و $\text{ها}(-\frac{1}{5}) \times \text{ها}(-\frac{1}{10}) < 0$، إذن يوجد $\alpha \in]-\frac{1}{5}, -\frac{1}{10}[$ بحيث $\text{ها}(\alpha) = 0$	2×0,25	
	أي α حل للمعادلة $\text{ها}(س) = 0$ وبما أن ها رتيبة تماما في هذا المجال فإن α وحيد.	0,25	
	3- $\text{ها}(س) > 0 \Leftrightarrow س \in]\alpha, +\infty[$ ، $\text{ها}(س) < 0 \Leftrightarrow س \in]-\infty, \alpha[$ ، $\text{ها}(س) = 0 \Leftrightarrow س = \alpha$	2×0,25	
	(ب) 1- دراسة تغيرات الدالة $\text{تا}: س \mapsto س^2 + e^{2(س-1)}$		
	تا معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق على ح .	0,25	
	$\lim_{س \to -\infty} \text{تا}(س) = +\infty$ ، $\lim_{س \to +\infty} \text{تا}(س) = +\infty$	2×0,25	
	$\forall س \in ح$ ، $\text{تا}'(س) = 2\,\text{ها}(س)$	0,25	
	$\text{تا}'(س) > 0 \Leftrightarrow \text{ها}(س) > 0 \Leftrightarrow س \in]\alpha, +\infty[$ ؛ $\text{تا}'(س) < 0 \Leftrightarrow \text{ها}(س) < 0 \Leftrightarrow س \in]-\infty, \alpha[$ ؛ $\text{تا}'(س) = 0 \Leftrightarrow \text{ها}(س) = 0 \Leftrightarrow س = \alpha$	0,5	
	تشكيل جدول التغيرات .	0,25	
	2- إثبات أن $\text{تا}(\alpha) = \alpha^2 - \alpha$ و $\frac{11}{100} < \text{تا}(\alpha) < \frac{6}{25}$.	0,25 + 0,5	
	3- (ى) يقبل فرعين لا نهائيين مكافئين باتجاه حامل محور التراتيب	2×0,25	
	- $\text{تا}(-1) \simeq 1{,}01$ ، $\text{تا}(-\frac{1}{2}) \simeq 0{,}29$ ، $\text{تا}(\frac{1}{2}) \simeq 0{,}61$ ، $\text{تا}(1) = 2$	1	
	- رسم (ى) (أنظر الورق الميليمتري) .	0,75	
	II 1- إثبات وجود عا^{-1} وتعيين مجال تعريفها $ف_{\text{عا}^{-1}} = [e^{-2}, +\infty[$.	0,25+0,25	2
	2- معادلة المماس هي $ع = (\text{عا}^{-1})'(س_0)(س - س_0) + \text{عا}^{-1}(س_0)$ حيث $\text{عا}(1) = س_0$ ؛ $ع = \frac{1}{4}س + \frac{1}{2}$	4×0,25	
	3- إنشاء $(ى')$ منحنى عا^{-1} (أنظر الورق الميليمتري)	0,5	
	III 1- حساب $ح_ن$ بدلالة ن : $ح_ن = \frac{1}{2}(1 - e^{-2}) e^{-2ن}$ متتالية هندسية ...	3×0,25	2,5
	2- المجموع $م_ن = \frac{1}{2}(e^{0} - e^{-2(ن+1)})$	3×0,25	
	3- المساحة $ل = 25 \int_0^ن [\text{تا}(س) - س^2]\,دس = 25\,م_ن$	0,5+0,25	
	$25\,م_ن = \frac{25}{2}(e^{0} - \frac{1}{e^{6}})$ ومنه $e^{-2ن} = e^{-6}$ ... ومنه ن = 3 .	0,25	

10